Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 14

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

3 de abril de 2019

En el capítulo 14 de la serie hemos visto que la función de Green para el operador $\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-1\right)$ es

$$G(x,x') = -\frac{1}{2}e^{-|x-x'|} \tag{1}$$

Queremos encontrar entonces la solución a la ecuación diferencial

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-1\right)f(x) = f''(x) - f(x) = x^2 \tag{2}$$

Tenemos que calcular entonces la integral

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,x')g(x')\mathrm{d}x' = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-|x-y|}\mathrm{d}y \tag{3}$$

Separemos la integral en función de si $x > y$ o $x < y$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} y^2 e^{y-x}\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int_{x}^{\infty} y^2 e^{x-y}\mathrm{d}y \tag{4}$$

Usando integración por partes

$$\int f(y)g'(y)\mathrm{d}y = f(y)g(y) - \int f'(y)g(y)\mathrm{d}y \tag{5}$$

Usaré el método DI para hacer las integrales, el método consiste en hacer una tabla, en la primera columna alternamos los signos + y -, en la segunda columna derivamos la función $f(x)$ y en la tercera columna integramos la función $g(x)$, ver tabla 1.

	D	I_1	I_2
$+$	y^2	e^{y-x}	e^{x-y}
$-$	$2y$	e^{y-x}	$-e^{x-y}$
$+$	2	e^{y-x}	e^{x-y}
$-$	0	e^{y-x}	$-e^{x-y}$

Tabla 1: En la primera columna intercalamos $+$ y $-$, en la segunda derivamos la función y^2 y en la tercera integramos la función $e^{-|x-y|}$.

El resultado de la primera integral es ir a la tabla, multiplicar la primera fila de D por la segunda de I_1, la segunda fila de D por la tercera de I_1 y finalmente sumar o restar en función de lo que indique la primera columna:

$$\left[+y^2e^{y-x} - 2ye^{y-x} + 2e^{y-x}\right]_{-\infty}^{x} = x^2 - 2x + 2 \tag{6}$$

Mientras que la segunda

$$\left[+y^2\left(-e^{x-y}\right) - 2ye^{x-y} + 2\left(-e^{x-y}\right)\right]_{x}^{\infty} = x^2 + 2x + 2 \tag{7}$$

La solución final es, por lo tanto, segun (4)

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left[x^2 - 2x + 2 + x^2 + 2x + 2\right] = -x^2 - 2 \tag{8}$$

Comprobemos que en efecto es una solución:

$$f'(x) = -2x, \qquad f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(x) - f(x) = -2 + x^2 + 2 = x^2 \tag{9}$$

En efecto esta función cumple la ecuación que queriamos.